Tentamen Numerieke Wiskunde I

30 januari 2008   9.00-12.00 uur

Bij dit tentamen mag een (grafische) rekenmachine worden gebruikt.
Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Een antwoord zonder berekening zal dus niet worden goed gerekend. Succes !

Vermeld op elk vel papier je naam, studentnummer en jaar van inschrijving.

Gratis: $\boxed{10}$

Practica: $\boxed{15}$ Voor de 5 computerpractica zijn maximaal 3 punten per practicum te verdienen.

1. Om het snijpunt te bepalen van $f_1(x) = \cos(x)$ en $f_2(x) = x^2$ moet worden opgelost

$$\cos(x) - x^2 = 0.$$

Uit een plaatje blijkt dat het snijpunt ligt bij $x \approx 0.82$.

(a) $\boxed{9}$ Een successieve substitutie methode maakt gebruik van het iteratie voorschrift $x_{n+1} = g(x_n)$. Er wordt begonnen met $x_0 = 1$.
(1) Bepaal bij dit probleem een geschikte functie $g(x)$ en toon aan dat deze $g(x)$ voldoet aan de voorwaarde(n) voor convergentie.
(2) Hoe snel zal de fout op den duur afnemen tussen opeenvolgende iteraties?
(3) Leg uit hoe je op basis van opeenvolgende iteraties een schatting van de fout kunt bepalen.

(b) $\boxed{9}$
(1) Bepaal het iteratievoorschrift van de Newton methode bij dit probleem.
(2) Geef een voordeel en een nadeel van de Newton methode.
(3) Leg uit hoe de Secant methode volgt uit de Newton methode en wat het voordeel van deze methode is.

2. Gegeven is de integraal $\int_0^1 3x^2 dx$ met exacte waarde 1.

(a) $\boxed{6}$ Wanneer het interval [0 1] wordt opgedeeld in $n = 10$ deelintervallen, wordt één van deze deelintervallen gegeven door [0.2 0.3].
(1) Hoe groot is de bijdrage van dit deelinterval aan de integraal als de Trapeziumregel wordt toegepast op de gegeven integraal?
(2) Geeft de Trapeziumregel een betere benadering van het deeloppervlak dan de Rechthoekregel bij dit deelinterval? Motiveer je antwoord.
Opmerking: deze vraag is te beantwoorden zonder $\int_{0.2}^{0.3} 3x^2\, dx$ exact of numeriek te berekenen.

(b) $\boxed{12}$ Met een numerieke integratie methode is onderstaand resultaat verkregen. Hierin is $I(n)$ de benaderde waarde van de integraal op een rooster met n deelintervallen.

n	$I(n)$	absolute fout
2	0.9375	$6.25 * 10^{-2}$
4	0.984375	$1.56 * 10^{-2}$
8	0.99609375	$3.91 * 10^{-3}$
16	0.9990234375	$9.77 * 10^{-4}$
32	0.999755859375	$2.44 * 10^{-4}$
64	0.9999389648438	$6.10 * 10^{-5}$
128	0.9999847412109	$1.53 * 10^{-5}$

(1) Bepaal de convergentie orde. Geef duidelijk aan hoe je aan je antwoord komt.
(2) Hoeveel deelintervallen zijn er ongeveer nodig voor een fout van 10^{-8}?
(3) Hoe groot is het quotiënt $q(h/2)$ (theoretisch) voor deze methode? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.
(4) Geef een schatting voor de fout van $I(64)$ op basis van $I(n)$ benaderingen en vergelijk deze met de werkelijke fout.
(5) Bepaal met $I(64)$ en $I(128)$ via extrapolatie een betere benadering van de integraal.

3. De impliciete Euler methode wordt gegeven door $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ en de Trapezium methode door $y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$.

   Beschouw de vergelijking $y' = -2y + x$ op het interval [0 1], met randvoorwaarde $y(0) = 1$.

   (a) $\boxed{5}$ De impliciete Euler methode geeft een impliciete uitdrukking voor y_{n+1}.
   (1) Herschrijf deze uitdrukking tot een expliciete uitdrukking.
   (2) Toon met deze expliciete uitdrukking aan dat de methode stabiel is voor de gegeven differentiaalvergelijking.

   (b) $\boxed{4}$ Hoe luidt de (expliciete) methode van Heun (ofwel RK2) voor dit geval?

   (c) $\boxed{5}$ De Trapezium methode heeft $\mathcal{O}(h^2)$ nauwkeurigheid.
   (1) Leg uit hoe je m.b.v. oplossingen op twee roosters (h en $h/2$) een verbeterde oplossing kunt construeren.
   (2) Wat is de daarbij verkregen orde van nauwkeurigheid? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

   (d) $\boxed{5}$ De Trapezium methode kan worden afgeleid uit de Trapeziumregel voor numerieke integratie. Op soortgelijke wijze kan een Rechthoek methode worden afgeleid.
   (1) Bepaal de uitdrukking voor de Rechthoek methode bij de differentiaalvergelijking.
   (2) Tot welke categorie hoort de verkregen methode?

4. Beschouw de vergelijking $Ax = b$.

   (a) $\boxed{5}$ Een verstoring r in het rechterlid: $A\tilde{x} = b + r$ geeft een verstoring $e := \tilde{x} - x$ in de oplossing. Toon aan dat hiervoor geldt:

$$\frac{1}{k(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq k(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}\,, \quad \text{met} \quad k(A) := \|A\|\|A^{-1}\|$$

   (b) $\boxed{5}$ Legt in het kort uit hoe de snelste directe oplosmethode werkt voor het geval dat A een tri-diagonale matrix is.

   (c) $\boxed{6}$ Bepaal de iteratiematrix van de Jacobi methode als de matrix wordt gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

   Is de methode van Gauss-Seidel convergent voor dit geval? Waarom?

   (d) $\boxed{4}$ Leg kort uit hoe je in het algemeen optimale relaxatie parameter ω_{opt} voor de SOR methode kunt bepalen.

Totaal: $\boxed{100}$